

1. Határozza meg a következő sorok összegét, amennyiben konvergensek

a) $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{10}{2^{n-1}} + \dots,$

b) $2 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \dots,$

c) $-4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \dots - \frac{4}{5^{n-1}} + \dots,$

d) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots,$

e) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n \cdot 4n} + \dots,$

f) $\frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)} + \dots.$

2. Vizsgálja, hogy a következő sorok konvergensek-e!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$

3. Hozza egyszerűbb alakra!

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

4. Igazolja az alábbi összefüggések helyességét!

a) $\sin x \cdot \sin(x + y) + \cos x \cdot \cos(x + y) = \cos y$

b) $\cos x \cdot \sin(x - y) - \sin x \cdot \cos(x - y) = -\sin y$

5. Adja meg a következők szögfüggvényeinek pontos értékét!

a) 15°

b) $\frac{5\pi}{12}$

6. Adja meg a kétszeres, illetve háromszoros szögekre vonatkozó szögfüggvényformulákat (pl. $\sin 2x$, $\cos 3x$)!

7. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{2x},$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}.$

8. Határozza meg az alábbi függvények megadott pontokon átmenő szelőinek meredekségét.

a) $f(x) = x^2 - 4; x_1 = -1, x_2 = 3;$

b) $g(x) = \sqrt{x+2}; x_1 = 0, x_2 = 2;$

c) $h(x) = 2^{-x}; x_1 = -2, x_2 = 1;$

d) $i(x) = \cosh x; x_1 = 0, x_2 = 2.$

9. Adja meg az alábbi függvények megadott pontokon átmenő szelőinek egyenletét.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2; x_1 = 1, x_2 = 3;$

b) $g(x) = \sin x; x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{3};$

c) $h(x) = \log_3(x+2) + 1; x_1 = 1, x_2 = 7;$

d) $i(x) = \sinh x; x_1 = -1, x_2 = 1.$

10. Írja fel a megadott x_0 pontban az alábbi függvények differenciahányadosát a lehető legegyszerűbb formában.

a) $x_0 = 7; f(x) = -2x + 1;$

b) $x_0 = 2; g(x) = 3x^2 - 5;$

c) $x_0 = -2; h(x) = \sqrt{x+3};$

d) $x_0 = 0; i(x) = \frac{1}{x+2}.$

11. Számítsa ki az adott függvény adott x_0 pontbeli differenciálhányadosát.

a) $x_0 = 0$; $f(x) = 3x - 2$;

b) $x_0 = 1$; $g(x) = 6x^2 + 2x - 4$;

c) $x_0 = 3$; $h(x) = 2\sqrt{x}$;

d) $x_0 = -2$; $i(x) = \frac{1}{2}x^3$

12. Írja fel a függvények adott pontbeli érintőjének egyenletét.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $x_0 = 3$;

b) $g(x) = -(x + 3)^2 + 3$, $x_0 = -1$;

c) $h(x) = \frac{2}{x} - 2$, $x_0 = 4$;

d) $i(x) = x^3 + x^2$, $x_0 = 1$.

13.